Model 3 test admitere Automatică şi Calculatoare

1.Valorile parametrului real a pentru care rădăcinile ecuaţiei $x^2 + 2ax + 1 = 0$ verifică egalitatea $x_1^2 + x_2^2 = 1$ sunt:

$a)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ şi $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad b)$ $\frac{3}{2}$ şi $-\frac{3}{2}$ $\quad c)$ $\frac{3}{4}$ şi $-\frac{3}{4}$ $\quad d)$ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ şi $-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Rezolvare: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-2a)^2 - 2 = 4a^2 - 2$. Răspuns corect **a)**.

2. Considerăm familia de funcţii de gradul al doilea $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_m(x) = (m^2 + 1)x^2 + 2mx + 1$. Notăm cu $V_m(x_m, y_m)$ vârfurile parabolelor asociate. Atunci:

a) Valoarea minimă a lui x_m este $-\frac{1}{2}$ şi se obţine pentru $m = 1$.
b) Valoarea minimă a lui y_m este 0 şi se obţine pentru $m = 1$.
c) Valoarea maximă a lui x_m este $-\frac{1}{2}$ şi se obţine pentru $m = 0$.
d) Valoarea maximă a lui y_m este 0 şi se obţine pentru $m = 1$.

Rezolvare: Pentru fiecare $m \in \mathbb{R}$ avem

$$\begin{aligned} x_m &= -\frac{b}{2a} = -\frac{m}{m^2+1} \\ y_m &= -\frac{\Delta}{4a} = \frac{1}{m^2+1}. \end{aligned}$$

Se observă imediat că valoarea minimă a lui y_m este 0, atingându-se pentru $m \to \pm\infty$ iar valoarea maximă este 1 şi se atinge pentru $m = 0$. Deci, $b)$ şi $d)$ sunt false. Pe de altă parte, folosind inegalitatea mediilor, avem $m^2 + 1 \geq 2m$, pentru orice $m \in \mathbb{R}$ iar egalitatea se obţine pentru $m = 0$. De aici rezultă că

$$x_m = -\frac{m}{m^2+1} \geq -\frac{1}{2},$$

cu egalitate pentru $m = 1$.

Răspuns corect: **a).**

3. Mulţimea de definiţie a funcţiei $f(x) = \arcsin\sqrt{1+x} + \ln(1+2x)$ este:

$a)$ $(-1, 0]$ $\quad b)$ $[0, 1]$ $\quad c)$ $(-\frac{1}{2}, 0]$ $\quad d)$ $[-1, \frac{1}{2}]$.

Rezolvare: Condiţiile de existenţă sunt:

$$\left\{ \begin{array}{c} 1 + x \geq 0 \\ 0 \leq \sqrt{1+x} \leq 1 \\ 1 + 2x > 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \geq -1 \\ -1 \leq x \leq 0 \\ x > -\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Variantă corectă de răspuns: **c)**.

4. Numerele strict pozitive $x < y < z$ sunt astfel încât e^x, e^y şi e^z sunt în progresie geometrică. Atunci, valoarea raportului $\frac{y-x}{z-x}$ este:

$a)$ 2 $\quad b)$ -2 $\quad c)$ $\frac{1}{2}$ $\quad d)$ $-\frac{1}{2}$.

Rezolvare: Progresia geometrică ne asigură că $e^{2y} = e^{x+z}$, deci $y = \frac{x+z}{2}$. Se înlocuieşte în raport y cu $(x + z)/2$ şi obţinem varianta corectă de răspuns **c)**.

5. Fie funcţia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = kn + (-1)^n$, unde $k \geq 3$ este un număr natural. Atunci:

a) f este bijectivă
b) f este injectivă dar nu este surjectivă
c) f este surjectivă dar nu este injectivă
d) f nu este nici injectivă nici surjectivă

Rezolvare: Dacă presupunem că f nu este injectivă rezultă că există $n, m \in \mathbb{N}$, diferite a.i. $f(n) = f(m)$, adică

$$kn + (-1)^n = km + (-1)^m.$$

Obţinem, mai departe, $k(n - m) = (-1)^n - (-1)^m$. Dar, membrul drept are modulul cel puţin egal cu 3 pentru că m şi n sunt diferite iar k$\geq$ 3 iar membrul stâng are modulul maxim 2. Presupunerea făcută este, deci, falsă iar f este injectivă. Pe de altă parte, printre valorile lui f nu se află nici un multiplu al lui k deci f nu este surjectivă.

Răspuns corect: **b)**.

6. Fie ecuaţia $(e^{2x}-2e^x)^2-2e^{2x}+4e^x-3=0$. Atunci:
a) Ecuaţia are 4 soluţii reale, distincte.
b) Ecuaţia are exact o soluţie raţională.
c) Ecuaţia are exact două rădăcini raţionale.
d) Toate rădăcinile ecuaţiei sunt numere iraţionale.

Rezolvare: Dacă notăm $e^{2x}-2e^x=t$ ecuaţia devine $t^2-2t-3=0$ sau, echivalent, $(t+1)(t-3)=0$. Astfel, fie $e^{2x}-2e^x=-1$, fie $e^{2x}-2e^x=3$. Rezolvînd cele 2 ecuaţii se obţine imediat $e^x \in \{1,-1,3\}$. Evident, nu putem avea decât $x=0$ sau $x=\ln 3$.

Răspuns corect: **b).**

7. Sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} 2^{x^2}\cdot 3^{y^2+1}=24 \\ 2^{y^2+2}\cdot 3^{x^2}=108 \end{cases}$$

are:

$a)$ o soluţie $\quad b)$ 2 soluţii $\quad c)$ 3 soluţii $\quad d)$ nici o soluţie .

Rezolvare: Sistemul poate fi rescris în forma:

$$\begin{cases} 2^{x^2}\cdot 3^{y^2}=8 \\ 2^{y^2}\cdot 3^{x^2}=27 \end{cases}.$$

Făcând raportul celor două ecuaţii se obţine

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{y^2}=\frac{2^3}{3^3},$$

de unde, $x^2-y^2=3$. Înlocuind în prima ecuaţie a sistemului, obţinem

$$2^{y^2}\cdot 3^{y^2}=1,$$

şi, deci, $y=0$ şi $x=\pm\sqrt{3}$.

Răspuns corect: **b).**

8. Se consideră polinomul $f=X^3+pX^2+2p^2X+3p^3$, $p\neq 0$. Atunci, raportul dintre pătratul sumei cuburilor rădăcinilor lui f şi cubul sumei pătratelor rădăcinilor lui f este egal cu:

$a)\ -\dfrac{16}{27} \qquad b)$ -16 $\qquad c)\ -27 \qquad d)\ -\dfrac{27}{16}$.

Rezolvare: Se obţine $-\dfrac{16}{27}$ aplicând relaţiile lui Viete şi faptul că dacă x_i este rădăcină pentru f, atunci $x_i^3=-px_i^2-2p^2x_i-3p^3$

Răspuns corect: **a)**

9. Suma rădăcinilor polinomului

$$f=\frac{X(X+1)...(X+n-1)}{n!}+\frac{X(X+1)...(X+n-2)}{(n-1)!}+...+\frac{X(X+1)}{2!}+\frac{X}{1!}+1,\quad n\in\mathbb{N}$$

este:

$a)$ 0 $\quad b)\ -n^2 \quad c)\ -(n+1)^2 \quad d)\ -\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Rezolvare: Polinomul poate fi pus în forma

$$f=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+...+a_1X+a_0.$$

În această scriere, suma rădăcinilor lui f este egală cu $-\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$. În mod evident, $a_n=\dfrac{1}{n!}$. Pentru a afla a_{n-1}, observăm că singurii termeni care conţin X^{n-1} sunt primii doi termeni. În cel de-al doilea termen, coeficientul lui X^{n-1} este egal cu $\dfrac{1}{(n-1)!}$. Notând cu $g=X(X+1)...(X+n-1)$, observăm că termenul care conţine X^{n-1} are drept coeficient opusul sumei rădăcinilor lui g, adică $1+2+...+(n-1)=\dfrac{1}{2}n(n-1)$. Astfel, $a_{n-1}=\dfrac{1}{(n-1)!}+\dfrac{n(n-1)}{2n!}=\dfrac{n+1}{2(n-1)!}$ şi, în fine, suma rădăcinilor lui f este

$$s_1=-\frac{a_{n-1}}{a_n}=-\frac{n(n+1)}{2}.$$

Răspuns corect: **d)**

10. Numărul termenilor raţionali din dezvoltarea $\left(\sqrt{3}+\sqrt[3]{3}\right)^{2016}$ este egal cu:

$a)$ 1008 $\quad b)$ 672 $\quad c)$ 336 $\quad d)$ 337 .

Rezolvare: Termenul general este

$$T_{k+1} = C_{2016}^{k}\left(3^{2016-k}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{k}{3}} = C_{2016}^{k} 3^{1008-\frac{k}{6}}.$$

Astfel, numărul termenilor raţionali din dezvoltare este egal cu numărul multiplilor de 6 cel mult egali cu 2016, adică337.

Răspuns corect: **d).**

11. Cel mai mare termen din dezvoltarea $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)^{100}$ este:

$a)$ 1 $\quad b)$ T_{67} $\quad c)$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{100}$ $\quad d)$ T_{34} .

Rezolvare: Termenul general este

$$T_{k+1} = C_{100}^{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{100-k}\left(\frac{1}{3}\right)^{k} = \left(\frac{2}{3}\right)^{100} C_{100}^{k}\frac{1}{2^k}.$$

Atunci, $\frac{T_{k+1}}{T_{k+2}} \geq 1$ pentru $k \geq 33$ şi $\frac{T_{k+1}}{T_{k+2}} < 1$ pentru $k < 33$ deci cel mai mare termen se obţine pentru $k = 33$, deci T_{34}.

Răspuns corect: **d).**

12. Fie ω o rădăcină a ecuaţiei $x^2 + x + 1 = 0$ şi $n \in \mathbb{N}$. Atunci, valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} \omega^n & 1 & 1 \\ 1 & \omega^n & 1 \\ 1 & 1 & \omega^n \end{vmatrix}$$

a) nu depinde de n.
b) este constantă pentru n multiplu de 3.
c) este constantă pentru orice n multiplu al lui 4.
d) este constantă pentru orice n par.

Rezolvare: Deoarece $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ şi, evident, $\omega \neq 1$, rezultă că $\omega^3 = 1$. Cum determinantul este egal cu $\omega^{3n} + 2 - 3\omega^n = 3(1-\omega^n)$, răspunsul corect este **b)**

13. Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} x & x & 0 \\ x & 0 & m \\ 0 & m & m \end{pmatrix}.$$

Atunci,
a) Există $m \in \mathbb{R}$ astfel încât A este inversabilă, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
b) Pentru orice $m \in \mathbb{R}$ există $x \in \mathbb{R}$ astfel încât A este inversabilă.
c) Există $m \in \mathbb{R}$ astfel încât rang $A = 2$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
d) Pentru orice $m \in \mathbb{R}$ şi pentru orice $x \in \mathbb{R}$ rang $A = 2$.

Rezolvare: Răspunsl corect este, evident, **c)**

14. Fie x_1, x_2, x_3 soluţiile ecuaţiei $x^3 + px + q = 0$, unde $p, q \in \mathbb{N}^*$ şi sistemul de ecuaţii liniare

$$\begin{cases} x_1x + x_2y + x_3z = 1 \\ x_2x + x_3y + x_1z = p \\ x_3x + x_1y + x_2z = q \end{cases}.$$

Atunci:
a) Sistemul este incompatibil.
b) Sistemul este compatibil unic determinat.
c) Sistemul este compatibil 1-nedeterminat.
d) Sistemul este compatibil 2-nedeterminat.

Rezolvare: Determinantul matricei sistemului este

$$\det A = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 3x_1x_2x_3 - (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3).$$

Folosind relaţiile lui Viete rezultă $x_1x_2x_3 = -q$, $x_1^3+x_2^3+x_3^3 = -p(x_1+x_2+x_3)-3q = -3q$. Astfel, $\det A = 0$. Sistemul este compatibil dacă şi numai dacă rangul matricei sistemului este egal cu rangul matricei extinse. Dar,

$$\begin{aligned}
d &= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ x_2 & x_3 & p \\ x_3 & x_1 & q \end{vmatrix} = qx_1x_3 + x_1x_2 + px_2x_3 - \left(x_3^2 + qx_2^2 + px_1^2\right) \\
&= x_1x_2 - x_3^2 + q(x_1x_3 - x_2^2) + p(x_2x_3 - x_1^2) \\
&= -\frac{q}{x_3} - x_3^2 + q(-\frac{q}{x_2} - x_2^2) + p(-\frac{q}{x_1} - x_1^2) \\
&= -\frac{1}{x_3}(x_3^3+q) - \frac{q}{x_1}(x_2^3+q) - \frac{p}{x_1}(x_2^3+q) \\
&= -\frac{1}{x_3}\cdot(-px_3) - \frac{q}{x_2}\cdot(-px_2) - \frac{p}{x_1}\cdot(-px_1) \\
&= p(p+q+1) \neq 0.
\end{aligned}$$

Deci, rangul matricei extinse este diferit de rangul matricei sistemului

Răspuns corect : **a).**

15. Fie $p \in \mathbb{N}$ un număr natural $p \geq 2$. În $(\mathbb{Z}_{p^2}, \cdot, +)$, considerăm ecuaţia $x^2 + x = \hat{0}$. Atunci,

a) Pentru orice număr natural p ecuaţia are 2 soluţii distincte.

b) Pentru orice număr p prim ecuaţia are două soluţii distincte.

c) Există numere prime p pentru care ecuaţia are mai mult de două soluţii (diferite două câte două).

d) Pentru orice număr natural p ecuaţia are mai mult de două soluţii (diferite două câte două)..

Rezolvare: Afirmaţia de la punctul d) este, evident, falsă. Ecuaţia poate fi pusă sub forma x(x+$\hat{1}$)=$\hat{0}$. În $\mathbb{Z}_6$ ecuaţia are 4 soluţii: $\hat{0}$, $\hat{2}$, $\hat{3}$, $\hat{5}$. Deci, şi a) este falsă. Rămâne de stabilit care dintre punctele b şi c este adevărat. Fie, deci p un număr prim. Cum în $\mathbb{Z}_p$, în general, elementele inversabile sunt acele elemente $\hat{q}$ pentru care (p,q)=1, în $\mathbb{Z}_{p^2}$, cu p prim elementele neinversabile sunt toţi multilplii lui p strict mai mici decât p^2, toate celelalte elemente fiind inversabile. Separând cele două cazuri se obţin doar două soluţii: $\hat{0}$ şi $\widehat{p^2-1}$.

Răspuns corect: **b)**

16. Fie limita

$$L = \lim_{x\to 0_+} x\left(\left[\frac{1}{x}\right] + \left[\frac{2}{x}\right] + ... + \left[\frac{n}{x}\right]\right), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Atunci,

(a) $L = 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$;

(b) $L = n^2$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$;

(c) $L = 2016$ pentru $n = 1008$;

(d) $L = 2016$ pentru $n = 63$.

Rezolvare: Rezolvarea se bazează pe faptul că

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{x}{a}\cdot\left[\frac{b}{x}\right] = \frac{b}{a}, \quad \forall a, b > 0.$$

(De fapt, nu contează că e 0_+, dar uşurează discuţia). Este clar că

$$\left[\frac{b}{x}\right] = k \Leftrightarrow \frac{b}{x} \in [k, k+1) \Leftrightarrow x \in (\frac{b}{k+1}, \frac{b}{k}]$$

şi $x \to 0$ în acelaşi timp în care $k \to +\infty$. Pentru un k fixat şi $x \in (\frac{b}{k+1}, \frac{b}{k}]$ avem

$$\frac{b}{a}\cdot\frac{k}{k+1} < \frac{x}{a}\cdot\left[\frac{b}{x}\right] \leq \frac{b}{a}$$

şi cum membrul stâng al dublei inegalităţi tinde la $\frac{b}{a}$ pentru $x \to 0$ rezultă, conform teoremei cleştelui, că

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{x}{a}\cdot\left[\frac{b}{x}\right] = \frac{b}{a}.$$

Atunci, limita din enunţ este egală cu $\dfrac{n(n+1)}{2}$. Răspuns corect, **d).**

17. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ şi funcţia

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & , x \in \mathbb{Q} \\ -bx^2 + cx & , x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}.$$

Atunci,

(a) Funcţia f este discontinuă pe $\mathbb{R}$ pentru orice $a, b, c \in \mathbb{R}$;

(b) Pentru $b = -1$ există $a, c \in \mathbb{R}$ astfel încât f să aibă un punct de continuitate diferit de $x = 0$;

(c) Există valori pentru $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq c$ astfel încât f este continuă pe $\mathbb{R}$;

(d) Există valori pentru $a, b, c \in \mathbb{R}$, $b \neq -1$ astfel încât f să aibă un punct de continuitate diferit de $x = 0$.

Rezolvare: Este cunoscut faptul că x este punct de continuitate dacă şi numai dacă $x^2 + ax = -bx^2 + cx$, adică $x((b+1)x + (a-c)) = 0$. Rezultă imediat concluziile. Răspuns corect: **(d).**

18. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot \{x\}$, unde prin $\{x\}$ se înţelege partea fracţionară a lui x. Atunci,

(a) Funcţia f este derivabilă pe $\mathbb{R}$, $f'(x) = x + \{x\}$;

(b) Funcţia f este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $f'(x) = 2x - [x]$;

(c) Funcţia f nu este derivabilă în nici un punct;

(d) Funcţia f nu este continuă în nici un punct;

Rezolvare: Având în vedere că $\{x\} = x - [x]$ rezultă că pentru orice $k \in \mathbb{Z}$ şi orice $x \in [k, k+1)$ avem $f(x) = x^2 - kx$. Este clar că f este continuă şi derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ şi

$$f'(x) = 2x - k = 2x - [x] = x + \{x\}$$

Răspuns corect: **(b).**

19. Considerăm funcţia $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(a \sin x)$, unde $a \in (0, \pi)$. Valoarea lui a pentru care punctul dat de teorema lui Rolle este $c = \dfrac{\pi}{4}$ este:

(a) $\dfrac{\pi}{2}$ (b) $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (c) $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$ (d) Acestei funcţii nu i se poate aplica teorema lui Rolle.

Rezolvare: Se verifică imediat că putem aplica teorema lui Rolle, deci $f'(\frac{\pi}{4}) = 0$. Astfel, $\cos(a \sin \frac{\pi}{4}) \cdot a \cos \frac{\pi}{4} = 0$ şi deci $\dfrac{a}{\sqrt{2}} = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, $\quad k \in \mathbb{Z}$. Cum $a \in (0, \pi)$, nu putem avea decât $\dfrac{a}{\sqrt{2}} = \dfrac{\pi}{2}$, adică $a = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$. Răspuns corect: **(c).**

20. Fie $f : (0, 2) \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + \ln x$, unde $a \in \mathbb{R}$. Atunci,

(a) Pentru orice $a \in \mathbb{R}$, orice primitivă a lui f este crescătoare pe $(0, 2)$;

(b) Există $a \in \mathbb{R}$ pentru care orice primitivă a lui f este descrescătoare;

(c) Pentru orice $a \in \mathbb{R}$, nici o primitivă a lui f nu este monotonă;

(d) Pentru orice $a \in \mathbb{R}$, orice primitivă a lui f este descrescătoare pe $(0, 2)$

Rezolvare: . Este clar că orice primitivă a lui f este monotonă dacă f are semn constant pe (0,2). Având în vedere că $\lim\limits_{x \to 0_+} \ln x = -\infty$ iar ax este mărginită pe (0,2), trebuie ca $f(x) \leq 0$ pe (0,2). Atunci, problema revine la

$$\frac{\ln x}{x} \leq -a, \quad \forall x \in (0, 2)$$

Dar, se arată imediat că funcţia $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ este crescătoare pe (0,2) şi atunci trebuie ca $\dfrac{\ln 2}{2} \leq -a$. Deci, pentru $a \leq -\dfrac{\ln 2}{2}$ orice primitivă a lui f este descrescătoare pe (0,2). Răspuns corect: **(b).**

21. Considerămn şirul (I_n) definit de integrala

$$I_n = \int_a^b \frac{\sin nx}{x} dx, \quad n \geq 1, \text{ unde } 0 < a < b.$$

(a) $\lim\limits_{n \to \infty} I_n = 0$;

(b) Şirul I_n nu are limită;

(c) $\lim\limits_{n \to \infty} I_n = b - a$

(d) $\lim\limits_{n \to \infty} I_n = a \cdot b$

Rezolvare: Facem mai întâi schimbarea de variabilă $nx = t$ pentru a obţine

$$I_n = \int_{na}^{nb} \frac{\sin t}{t} dt.$$

Aplicăm mai departe integrarea prin părţi:

$$I_n = -\frac{\cos t}{t} \Big|_{na}^{nb} - \int_{na}^{nb} \frac{\cos t}{t^2} dt = \frac{1}{n}(\frac{\cos na}{a} - \frac{\cos nb}{b}) - \int_{na}^{nb} \frac{\cos t}{t^2} dt.$$

Dar,

$$\frac{1}{n}(\frac{\cos na}{a} - \frac{\cos nb}{b}) \to 0$$

pentru că paranteza este mărginită şi $\frac{1}{n} \to 0$, iar

$$\int_{na}^{nb} \frac{-1}{t^2} dt \leq \int_{na}^{nb} \frac{\cos t}{t^2} dt \leq \int_{na}^{nb} \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{t} \Big|_{na}^{nb} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \to 0.$$

Răspuns corect: **(a).**

22. Fie integrala $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2 + a\sin x} dx$, $a \in [0,1]$. Atunci,

(a) Valoarea minimă a integralei se atinge pentru $a = 0$ şi este egală cu $\frac{\pi}{2}$;

(b) Valoarea minimă a integralei se atinge pentru $a = 1$ şi este egală cu $\frac{1}{2}$;

(c) Valoarea maximă a integralei se atinge pentru $a = 0$ şi este egală cu $\frac{\pi}{2}$;

(d) Valoarea maximă a integralei se atinge pentru $a = 1$ şi este egală cu $\frac{1}{2}$.

Rezolvare: Este evident că valoarea minimă se obţine pentru a maxim iar valoarea maximă a integralei se obţine pentru a minim. Astfel, valoarea maximă este $\frac{\pi}{4}$ iar cea minimă este

$$I_{\min} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2 + \sin x}$$

Folosim formula

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

şi facem schimbarea de variabilă $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Obţinem

$$I = \int_0^1 \frac{1}{t^2 + 2t + 1} dt = -\frac{1}{t+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Răspuns corect: **(b).**

23. Graficul funcţiei $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ se roteşte în jurul axei Oy. Atunci, volumul corpului de rotaţie obţinut este

(a) $\frac{\pi^2}{4}$ (b) $\frac{\pi^2}{4} - 2$ (c) $\pi\left(\frac{\pi^2}{4} - 2\right)$ (d) $\frac{\pi^3}{2}$

Rezolvare: Este cunoscut că volumul unui corp de rotaţie obţinut prin rotaţia graficului unei funcţii $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ în jurul axei Ox este egal cu

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

În cazul nostru însă, rotaţia se face în jurul axei Oy şi atunci formula de calcul revine la:

$$\left(V = \pi \int_{f(a)}^{f(b)} \left(f^{-1}(y)\right)^2 dy\right)$$

$$V = \pi \int_0^1 \arcsin^2 y dy.$$

Aplicând integrarea prin părţi obţinem

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \arcsin^2 y dy &= y\arcsin^2 y \Big|_0^1 - 2\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \arcsin y dy = \frac{\pi^2}{4} + 2\int_0^1 \left(\sqrt{1-t^2}\right)' \arcsin y dy \\
&= \frac{\pi^2}{4} + 2\sqrt{1-t^2}\arcsin y \Big|_0^1 - 2 = \frac{\pi^2}{4} - 2
\end{aligned}$$

Răspuns corect: **(c).**

24. Fie $f = x^3 + mx^2 + nx + 1$ un polinom de gradul 3 pentru care numărul real a este o rădăcină dublă.

(a) Există o unică primitivă a lui f pentru care a este o rădăcină triplă.

(b) Numărul a este rădăcină pentru orice primitivă a lui f;

(c) Există o primitivă a lui f pentru care a este rădăcină de ordin 4;

(d) Există o infinitate de primitive ale lui f pentru care a este rădăcină triplă.

Rezolvare: Afirmaţia de la pct (**c**) este evident falsă, altfel a ar trebui să fie rădăcină triplă pentru f. În condiţiile ipotezei putem scrie

$$f = (x-a)^2(x+\frac{1}{a^2}).$$

Primitivele lui f au forma

$$\begin{aligned} F(x) &= \int (x-a)^2(x+\frac{1}{a^2})dx = \frac{1}{3}(x-a)^3(x+\frac{1}{a^2}) - \frac{1}{3}\int (x-a)^3 dx \\ F(x) &= \frac{1}{3}(x-a)^3(x+\frac{1}{a^2}) - \frac{1}{12}(x-a)^4 + C. \end{aligned}$$

Devine astfel clar că pentru C=0 obţinem o primitivă având a rădăcină triplă şi penrtu orice $C \neq 0$ a nu este rădăcină pentru primitiva corespunzătoare. Răspuns corect: **(a).**

25. Notăm cu S suma soluţiilor ecuaţiei $\sin 4x + \sin 6x = 0$ din intervalul $[-2\pi, 2\pi]$. Atunci,

(a) $S = 0$; (b) $S = 8\pi$ (c) $S = 10\pi$ (d) $S = -10\pi$

Rezolvare: Evident, 0 pentru că dacă x este soluţie pentru ecuţia de mai sus, şi -x este soluţie, iar intervalul de lucru este simetric.

26. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin \pi x + \{x\}$ are proprietatea că:

(a) este neperiodică;
(b) este periodică de perioadă 2π;
(c) este periodică de perioadă 1;
(d) este periodică de perioadă 2.

Rezolvare: Deoarece $\sin x$ este funcţie periodică de perioadă 2π rezultă că $\sin \pi x$ este periodică de perioadă 2. Pe de altă parte, partea fracţionară este funcţie periodică de perioadă principală 1. Răspuns corect: **(d).**

27. Considerăm în plan punctele $A(2, 4)$, $B(-1, 1)$, $C(0, -2)$ şi vectorul $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) $\overrightarrow{u}$ este coliniar cu $\overrightarrow{BC}$ pentru $a = 2$, $b = 2$;
(b) $\overrightarrow{u}$ este coliniar cu $\overrightarrow{BC}$ pentru $a = 1$, $b = 0$;
(c) $\overrightarrow{u}$ este perpendicular pe $\overrightarrow{BC}$ pentru $a = 8$ şi $b = 3$;
(d) $\overrightarrow{u}$ este perpendicular pe $\overrightarrow{BC}$ pentru $a = 16$ şi $b = -6$;

Rezolvare: Vectorul $\overrightarrow{u}$ este egal cu

$$\overrightarrow{u} = a(-3\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j}) + b(-2\overrightarrow{i} - 6\overrightarrow{j}) = (-3a-2b)\overrightarrow{i} + (-3a-6b)\overrightarrow{j}$$

iar $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j}$. Coliniaritatea este echivalentă cu relaţia

$$\frac{-3a-2b}{1} = \frac{-3a-6b}{-3} \Leftrightarrow -3a-2b = a+2b \Leftrightarrow a+b=0.$$

Perpendicularitatea este echivalentă cu

$$(-3a-2b)\cdot 1 + (-3a-6b)\cdot(-3) = 0 \Leftrightarrow 6a + 16b = 0.$$

Răspuns corect: **(d).**

28. Fie (d) o dreaptă de ecuaţie $x + 2y - 3 = 0$ şi punctele $A(1, 1)$ şi $B(4, 0)$. Punctul C pentru care dreapta (d) este mediatoarea dreptei BC este

(a) $C(\frac{1}{5}, -\frac{4}{5})$ (b) $C(\frac{18}{5}, -\frac{4}{5})$ (c) $C(\frac{18}{5}, -\frac{8}{5})$ (d) $C(\frac{1}{5}, -\frac{1}{5})$

Rezolvare: Pentru a găsi punctul C vom găsi mai întâi ecuaţia dreptei perpendiculară pe (d). Punctul C se află pe această dreaptă astfel încât punctul de intersecţie al dreptei BC cu dreapta (d) este mijlocul segmentului $[BC]$. Pentru că $BC \perp (d)$ rezultă că produsul pantelor lor este egal cu -1, deci panta dreptei BC este egală cu 2. Rezultă că ecuaţia dreptei BC este

$$BC: \quad y = 2(x-4) \text{ sau, echiv. } 2x - y - 8 = 0.$$

Punctul de intersecţie dinte BC şi (d) este soluţia sistemului de ecuaţii

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 8 \end{cases},$$

adică $(\frac{19}{5}, -\frac{2}{5})$. În fine, din relaţiile

$$\begin{cases} \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{19}{5} \\ \dfrac{y_B + y_C}{2} = -\dfrac{2}{5} \end{cases}$$

se obţine $C(\frac{18}{5}, -\frac{4}{5})$

Răspuns corect: **(b).**

29. Un triunghi dreptunghic are lungimile laturilor în progresie aritmetică şi aria egală cu $600cm^2$. Atunci, notând cu r raza cercului înscris şi cu R raza cercului circumscris triunghiului, avem:

(a) $r = 10, R = 25$;
(b) $r = 15, R = 20$;
(c) $r = 10, R = 20$;
(d) $r = 15, R = 25$.

Rezolvare: Folosind teorema lui Pitagora se demonstrează că laturile triunghiului sunt direct proporţionale cu 3, 4 şi 5. Răspuns corect: **(a).**

30. Fie $A(-2, 3)$ şi $B(2, -1)$. Dacă centrul cercului înscris în triunghiul ABC are coordonatele $(1, 2)$ atunci punctul C are coordonatele:

(a) $(\frac{11}{3}, \frac{8}{3})$ (b) $(-\frac{8}{3}, \frac{11}{3})$ (c) $(\frac{8}{3}, \frac{11}{3})$ (d) $(\frac{8}{3}, -\frac{11}{3})$

Rezolvare: Deoarece $AI = BI = \sqrt{10}$ rezultă că punctul C se află pe mediatoarea laturii AB. Această mediatoare are ecuaţia

$$\begin{aligned} (m) \quad &: \quad y - 1 = -\frac{1}{m_{AB}} x \text{ sau, echivalent} \\ (m) \quad &: \quad x - y + 1 = 0. \end{aligned}$$

Deoareca I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC, rezultă că $d(I, AB) = d(I, BC) = IM = \sqrt{2}$, unde $M(0, 1)$ este mijlocul segmentului $[AB]$. Putem scrie ecuaţia dreptei BC sub forma

$$\frac{x-2}{x_C - 2} = \frac{y+1}{y_C + 1} \Leftrightarrow (y_C + 1)x + (2 - x_C)y - x_C - 2y_C = 0$$

şi atunci

$$d(I, BC) = \frac{|-3x_C - y_C + 5|}{\sqrt{(x_C - 2)^2 + (y_C + 1)^2}} = \sqrt{2}$$

şi ţinând cont că punctul C se află pe dreapta (m), adică $x_C - y_C + 1 = 0$, obţinem $C(\frac{8}{3}, \frac{11}{3})$.

Răspuns corect: **(c).**