TEST MODEL 4

1. Să se calculeze
$I = \int_0^1 \left[\frac{x^3+3x^2+2x+1}{3}\right] dx$,unde $[u]$ este partea întreagă a lui u.
(a) $I = \frac{3}{4}$;**(b)** $I = 0$;**(c)** $I = \frac{1}{3}$;**(d)** $I = \frac{4}{3}$.

2. Să se determine primul termen şi raţia ale unei progresii aritmetice crescătoare $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, ştiind că:
$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = \frac{n\left(4n^2-1\right)}{3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
(a) $a_1 = 1, r = 2$; **(b)** $a_1 = 2, r = 1$;
(c) $a_1 = -1, r = 2$; **(d)** $a_1 = 1, r = 1$.

3. Câte funcţii monoton crescătoare se pot defini de la mulţimea $\{1, 2, 7\}$ la mulţimea $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$?
(a) 110; **(b)** 120; **(c)** 24; **(d)** 256.

4. Fie $f : \left(\frac{-1}{2}, \infty\right) \to \mathbb{R}$ funcţia derivabilă cu valori nenule ce verifică:
$\begin{cases} f^3(x) + f'(x) = 0, \forall x \in \left(\frac{-1}{2}, \infty\right), \\ f(0) = 1. \end{cases}$
Atunci:
(a) $f(2017) = \frac{1}{\sqrt{4035}}$; **(b)** $f(2017) = \frac{-1}{\sqrt{4035}}$;
(c) $f(2017) = \sqrt[4]{\frac{3}{2020}}$; **(d)** $f(2017) = -\sqrt[4]{\frac{3}{2020}}$.

5. Fie $f : (0, 2) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{2}{x^2+2x}$. Atunci $f^{(4)}(1)$ are valoarea:
(a) $6\left(1 - \frac{1}{3^4}\right)$; **(b)** $\frac{242}{243}$; **(c)** $24\left(1 + \frac{1}{3^5}\right)$; **(d)** $4!\left(1 - \frac{1}{3^5}\right)$.

6. Fie $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right), y \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ astfel încât $\cos x = \frac{4}{5}$ şi $\cos y = \frac{-1}{3}$. Atunci $\sin(2x + y)$ are valoarea:
(a) $\frac{24+14\sqrt{2}}{75}$; **(b)** $\frac{24-14\sqrt{2}}{75}$; **(c)** $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$; **(d)** 1.

7. Fie parametrul $m \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\overrightarrow{a} = -\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$ şi $\overrightarrow{b} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{i} + m\overrightarrow{j}$ să fie perpendiculari. Atunci $E = m + \cos\frac{\pi}{6} \cdot \sin\frac{\pi}{4}$ este:
(a) $\frac{\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{4}$; **(b)** $\frac{-\sqrt{2}}{4}$; **(c)** 0; **(d)** $\frac{1-2\sqrt{2}}{4}$.

8. Ecuaţia
$35^x - 25^x = 28^x - 20^x + 21^x - 15^x$
are:
(a) o soluţie; **(b)** nicio soluţie; **(c)** trei soluţii; **(d)** două soluţii.

9. Fie $a \in (0, 1)$ un parametru real dat. Mulţimea M a soluţiilor inecuaţiei

$$\left(\frac{1}{16}\right)^{8+\log_a x} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_a^2 x}$$
cu necunoscuta $x \in (0,1)$ este:
(a) $M = \left(a^8, a^{-4}\right)$; **(b)** $M = \left(0, a^{-4}\right)$; **(c)** $M = \left(0, a^8\right)$; **(d)** $M = \emptyset$.

10. Câte numere întregi mai mari decât numărul real $-2,018$ sunt în mulţimea
$A = \{x \in \mathbb{R}; |x - 2,018| \leq 3 - x\}$?
(a) 5; **(b)** 2; **(c)** 3; **(d)** o infinitate.

11. Pe mulţimea
$G = \left\{ A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}); A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \right\}$ se defineşte legea de compoziţie
$A_1 * A_2 = A_1 \cdot A_2 + 2(A_1 + A_2 + I_3), \forall A_1, A_2 \in G,$
unde I_3 este matricea unitate din $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$. În grupul abelian $(G, *)$, elementul simetric matricei $M = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ este:
(a) $M' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; **(b)** $M' = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$;
(c) $M' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$; **(d)** $M' = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

12. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -x, & \text{dacă } x \leq 0 \\ -x^2 + 2000x & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$:
(a) nu este monotonă pe $\mathbb{R}$; **(b)** este descrescătoare pe $\mathbb{R}$; **(c)** este injectivă pe $\mathbb{R}$; **(d)** nu este surjectivă.

13. Aria domeniului mărginit de dreptele $x = \frac{\pi^2}{16}, x = \frac{\pi^2}{4}, y = 0$ şi de graficul funcţiei
$f : \left[\frac{\pi^2}{16}, \frac{\pi^2}{4}\right] \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos\sqrt{x}$
este:
(a) $A = \pi - \frac{1}{4}\sqrt{2}\pi - \sqrt{2}$; **(b)** $A = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{8}\sqrt{2}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{2}$;
(c) $A = \pi - \frac{1}{4}\sqrt{2}\pi + \sqrt{2}$; **(d)** $A = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{8}\sqrt{2}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

14. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ fixat şi
$f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1] \setminus \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}\right\} \\ 0, & x \in \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}\right\} \end{cases}$.
Atunci $\int_0^1 f(x)\,dx$ are valoarea:
(a) $\frac{3}{8}$;**(b)** $\frac{1}{2}$;**(c)** $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2}\right)$;**(d)** $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + ... + \frac{1}{n^2}\right)$.

15. Fie parametrul $m \in \mathbb{R}$ şi ecuaţia
$mx^2 + (m+1)\,x + m - 1 = 0.$
Atunci condiţia necesară şi suficientă ca ecuaţia anterioară să nu admită rădăcini reale este:
(a) $m \in \left(3 - 2\sqrt{3}, 3 + 2\sqrt{3}\right)$; **(b)** $m \in \left(1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}, 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$;
(c) $m \in \left[1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}, 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$; **(d)** $m \in \left(-\infty, 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$.

16. Se dă ecuaţia $x^3 = i$, unde i este unitatea imaginară. Atunci:
(a) ecuaţia are o rădăcină reală;
(b) ecuaţia are două rădăcini complexe conjugate;
(c) ecuaţia are trei rădăcini complexe;
(d) dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile ecuaţiei, se verifică
$(x_1 + x_2 + x_3) - x_1x_2x_3 = i$.

17. Mulţimea tuturor soluţiilor ecuaţiei
$\dfrac{23A_x^4}{A_{x+1}^3 - C_x^4} = 24$ este:
(a) $\{1, 5\}$; **(b)** $\emptyset$; **(c)** $\{5\}$; **(d)** $\{5, 6\}$.

18. Fie $a > 0$ şi $b > 0$ parametri reali daţi şi punctele $A\,(2a, 0)\,, B\,(0, 2b)$.
Fie M un punct mobil pe dreapta
$(d) : bx + ay - ab = 0.$
Atunci locul geometric al centrului de greutate al ΔABM este dreapta:
(a) $(d') : 3xb + 3ay + ab = 0$;
(b) $(d') : 3xb + 3ay + 5ab = 0$;
(c) $(d') : 3xb - 3ay - 5ab = 0$;
(d) $(d') : 3xb + 3ay - 5ab = 0$.

19. Se consideră matricele
$A = \begin{pmatrix} 0 & 2017 & 1 \\ 0 & 0 & 2017 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $B = (I_3 + A)\left(I_3 - A + A^2\right)$
unde I_3 este matricea unitate. Atunci valoarea pentru $\det\left(A + B^{2017}\right)$ este:
(a) 1; **(b)** 9; **(c)** 0; **(d)** 2017.

20. Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$ şi $B = A^2 - 10A + 17I_2$. Fie c suma elementelor matricei A^3. Atunci:
(a) $B^{2018} = I_2$ şi $c = 604$; **(b)** $\det(B - A) = -15$ şi $c = 600$; **(c)** $2018B = 0_2$ şi $c = 596$; **(d)** B nu este inversabilă şi $c = 614$.

21. În $\mathbb{Z}_5$ fie sistemul
$$\begin{cases} x + y + z = \widehat{1} \\ \widehat{2}x + \widehat{3}y + z = \widehat{1} \\ -x - y + \widehat{3}z = \widehat{1} \end{cases}$$

şi $p = x \cdot y \cdot z$ produsul soluţiilor sistemului, dacă acestea există. Atunci
(a) $p = \widehat{1}$; **(b)** $p = \widehat{0}$; **(c)** sistemul este incompatibil; **(d)** $p = \widehat{3}$.

22. Se dă funcţia
$f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{\arcsin \sqrt{x}}{1 - \ln(e - x)}$.
Domeniul maximal de continuitate pentru f este:
(a) $\mathbb{D} = (0, e)$; **(b)** $\mathbb{D} = [0, 1]$; **(c)** $\mathbb{D} = (0, 1]$; **(d)** $\mathbb{D} = [0, e)$.

23. Fie $l_1 = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$ şi $l_2 = \lim\limits_{n \to \infty} b_n$, unde
$a_n = -\dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{7^2} - \dfrac{1}{7^3} + ... + \dfrac{(-1)^n}{7^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ şi
$b_n = \dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + ... + \dfrac{n}{(n+1)!}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Atunci $l_1 + l_2$ este:
(a) $\frac{15}{8}$; **(b)** 1; **(c)** $\frac{7}{8}$; **(d)** $\frac{1}{8}$.

24. Fie $l_1 = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ şi $l_2 = \lim\limits_{n \to \infty} y_n$, unde
$x_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ şi
$y_n = \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\ln n}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Atunci $l_1 \cdot l_2$ este:
(a) 0; **(b)** ∞; **(c)** $\frac{1}{4}$; **(d)** $\frac{e}{4}$.

25. Se dă funcţia
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arcsin x} \ln\left(1 + \sin^2 t\right) dt$.
Atunci $\lim\limits_{x \to 0, x > 0} \dfrac{f'(x)}{x^2}$ este:
(a) 0; **(b)** 1; **(c)** ∞; **(d)** nu există.

26. Fie $p = i \cdot i^2 \cdot ... \cdot i^{100}$. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia
$$f : (0, \pi) \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} p \cdot a \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right), & \text{dacă } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \dfrac{\sqrt[3]{\sin x} - 1}{x - \frac{\pi}{2}}, & \text{dacă } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \end{cases}$$
să fie continuă pe $(0, \pi)$.
(a) $a = \dfrac{-1}{3}$; **(b)** $a = \dfrac{1}{3}$; **(c)** $a = 0$; **(d)** nu există a cu proprietatea cerută.

27. Să se determine abscisele punctelor de extrem local ale funcţiei:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 12x$.
(a) -2 şi 2; **(b)** $0, -\sqrt{12}$ şi $\sqrt{12}$; **(c)** 16 şi -16; **(d)** f nu are puncte de extrem local.

28. Fie punctele din plan $A(1, 2)$ şi $B(3, 4)$. Fie C simetricul lui A faţă de B. Ecuaţia dreptei ce trece prin C şi este perpendiculară pe AB este:

(a) $(d): -x+y-1=0$;
(b) $(d): x+y+1=0$;
(c) $(d): 2x+y-6=0$;
(d) $(d): x+y-11=0$.

29. Fie $A(-2,-1), B(1,2), C(0,5)$ vârfurile unui triunghi. Să se ordoneze măsurile în grade ale unghiurilor triunghiului.

(a) $m\left(\widehat{A}\right) = m\left(\widehat{B}\right) > m\left(\widehat{C}\right)$; **(b)** $m\left(\widehat{A}\right) > m\left(\widehat{C}\right) > m\left(\widehat{B}\right)$;
(c) $m\left(\widehat{C}\right) < m\left(\widehat{A}\right) < m\left(\widehat{B}\right)$; **(d)** $m\left(\widehat{A}\right) < m\left(\widehat{C}\right) < m\left(\widehat{B}\right)$.

30. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $z = \dfrac{1+i}{1-i}$. Partea reală a numărului complex z^n este egală cu:

(a) 0; **(b)** -1; **(c)** $\cos\frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{N}^*$; **(d)** 1.