Model 2 test admitere Automatică şi Calculatoare

-răspunsuri-

1. Pentru un număr real y, notăm cu $\{y\}$ partea sa fracţionară. Valoarea limitei

$$\ell = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \cdot \int_0^t \{x\}^{2015} \ dx$$

este:

(a) 2016; (b) ∞; (c) 0; (d) $\dfrac{1}{2016}$.

Soluţie. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \{x\}$ este o funcţie periodică de perioadă 1 şi pentru orice $k \in \mathbb{N}^\star$,

$$\int_k^{k+1} \{x\}^{2015} \ dx = \int_0^1 \{x\}^{2015} \ dx = \int_0^1 x^{2015} \ dx = \frac{1}{2016}.$$

Pentru orice $t > 0$, există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$(n-1) \le t < n.$$

Atunci

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{t} \le \frac{1}{(n-1)}$$

şi

$$\int_0^{(n-1)} \{x\}^{2015} \ dx \le \int_0^t \{x\}^{2015} \ dx < \int_0^n \{x\}^{2015} \ dx.$$

Deci

$$\frac{n-1}{2016} \le \int_0^t \{x\}^{2015} \ dx \le \frac{n}{2016},$$

de unde

$$\frac{n-1}{2016n} \le \frac{1}{t} \int_0^t \{x\}^{2015} \ dx \le \frac{n}{2016(n-1)}.$$

Făcând $t \to \infty$, rezultă $n \to \infty$ şi

$$\ell = \frac{1}{2016}.$$

Răspuns corect: (d). $\square$

2. Valoarea integralei

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\ dx$$

este:

(a) 0; (b) $\dfrac{\pi}{2}$; (c) $\dfrac{\pi}{4}$; (d) π.

Soluţie. Făcând schimbarea de variabilă

$$\frac{\pi}{2} - x = y,$$

rezultă

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\cos y}{\cos y + \sin y}\ (-dy) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\ dx.$$

Cum

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\ dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\ dx = \frac{\pi}{2},$$

rezultă $I = \dfrac{\pi}{4}$.

Răspuns corect: (c). □

3. Considerăm funcţia $f : [0,1] \to [0,1]$, $f(x) = \sqrt[p]{x}$, unde $p \geq 1$. Notăm cu V_{Ox} şi, respectiv, V_{Oy}, volumele corpurilor de rotaţie obţinute prin rotirea graficului funcţiei f în jurul axei Ox şi, respectiv, în jurul axei Oy. Atunci valoarea lui p pentru care

$$\frac{V_{Ox}}{V_{Oy}} = 6$$

este:

(a) 3; (b) 2; (c) 5; (d) 4.

Soluţie. Se observă că funcţia inversă funcţiei f este $f^{-1} : [0,1] \to [0,1]\,,\ f^{-1}(y) = y^p$. Atunci volumele sunt

$$V_{Ox} = \pi \int_0^1 x^{\frac{2}{p}}\ dx = \pi \left. \frac{x^{\frac{2}{p}+1}}{\frac{2}{p}+1} \right|_0^1 = \pi \frac{p}{p+2},$$

$$V_{Oy} = \pi \int_0^1 y^{2p}\ dy = \pi \left. \frac{y^{2p+1}}{2p+1} \right|_0^1 = \frac{\pi}{2p+1}.$$

Rezultă că

$$6 = \frac{V_{Ox}}{V_{Oy}} = \frac{p(2p+1)}{p+2},$$

de unde $p = 4$.

Răspuns corect: (d). $\square$

4. Valoarea limitei

$$\ell = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+...+\frac{1}{3n}}$$

este:

(a) 2; (b) 1; (c) ∞; (d) $\dfrac{3}{2}$.

Soluţie. Să observăm scrierea sub formă de sumă Riemann

$$x_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + ... + \frac{1}{3n} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2+\frac{1}{n}} + \frac{1}{2+\frac{2}{n}} + ... + \frac{1}{2+\frac{n}{n}}\right).$$

Atunci

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \int_0^1 \frac{1}{2+x}\, dx = \ln(2+x)\Big|_0^1 = \ln\frac{3}{2}.$$

Rezultă că limita căutată are valoarea $\dfrac{3}{2}$.

Răspuns corect: (d). $\square$

5. Pentru un număr real y, notăm cu $[y]$ partea sa întreagă. Valoarea limitei

$$\ell = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{2016}} \cdot \int_0^x [y]^{2015}\, dy$$

este:

(a) 2016; (b) ∞; (c) 0; (d) $\dfrac{1}{2016}$.

Soluţie. Să observăm că, pentru orice $y \in \mathbb{R}$,

$$y - 1 < [y] \le y,$$

de unde

$$(y-1)^{2015} < [y]^{2015} \le y^{2015}$$

şi

$$\int_0^x (y-1)^{2015}\, dy \le \int_0^x [y]^{2015}\, dy \le \int_0^x y^{2015}\, dy.$$

Dar

$$\int_0^x (y-1)^{2015}\, dy = \frac{(y-1)^{2016}}{2016}\Big|_0^x = \frac{(x-1)^{2016}}{2016} - \frac{1}{2016},$$
$$\int_0^x y^{2015}\, dy = \frac{y^{2016}}{2016}\Big|_0^x = \frac{x^{2016}}{2016}.$$

Rezultă $\ell = \dfrac{1}{2016}$.

Răspuns corect: (d). $\square$

6. Fie, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, integrala

$$I_n = \int_0^1 x \cdot \{nx\} \; dx,$$

unde cu $\{y\}$ notăm partea fracţionară a numărului real y. Atunci $\lim_{n\to\infty} I_n$:

(a) nu există; (b) are valoarea $\dfrac{1}{4}$; (c) are valoarea 0; (d) are valoarea $\dfrac{1}{2}$.

Soluţie. Se observă că

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 x \cdot \{nx\} \; dx \overset{nx=y}{=} \int_0^n \frac{y}{n} \cdot \{y\}^k \; \frac{dy}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \int_i^{i+1} y \cdot (y - [y]) \; dy \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \int_i^{i+1} \left(y^2 - iy\right) dy = \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\left.\frac{y^3}{3}\right|_i^{i+1} - i \left.\frac{y^2}{2}\right|_i^{i+1} \right) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{i}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{n(n-1)}{4n^2} + \frac{1}{3n}. \end{aligned}$$

Rezultă $\lim_{n\to\infty} I_n = \dfrac{1}{4}$.

Răspuns corect: (b). $\square$

7. Fie $F : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ primitiva funcţiei $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$ pe $[0, \infty)$ care satisface $F(1) = \dfrac{\pi}{2}$. Atunci $F(0)$ este egală cu:

(a) 2016; (b) 1; (c) 0; (d) $\dfrac{\pi}{2}$.

Soluţie. Folosind formula de integrare prin părţi, obţinem că o primitivă a funcţiei f este de forma

$$x \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C.$$

Cum $F(1) = \dfrac{\pi}{2}$, rezultă că

$$F(x) = x \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} + 1$$

şi deci $F(0) = 1$.

Răspuns corect: (b). $\square$

8. Valoarea limitei

$$\ell = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}^3 x - x^3}{x^5}$$

este:

(a) $\frac{1}{4}$; (b) 1; (c) 0; (d) $\frac{1}{2}$.

Soluţie. Se poate scrie limita ca

$$\ell = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 x + x \operatorname{tg} x + x^2}{x^2}.$$

Avem

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x + x \operatorname{tg} x + x^2}{x^2} = 3$$

şi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos x + x \sin x}{3x^2} = \frac{1}{3}.$$

Rezultă că limita căutată are valoarea 1.

Răspuns corect: (b). □

9. Coordonatele punctului $P(a, b)$ situat pe graficul funcţiei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ pentru care tangenta la grafic dusă prin P este paralelă cu dreapta ce trece prin punctele $A(1, 1)$ şi $B\left(4, \dfrac{1}{4}\right)$ sunt:

(a) $\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; (b) $\left(2, \frac{1}{2}\right)$; (c) $\left(3, \frac{1}{3}\right)$; (d) $\left(\sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Soluţie. Aplicând Teorema lui Lagrange, rezultă

$$-\frac{1}{c^2} = f'(c) = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = -\frac{1}{4}.$$

Rezultă $c = 2$, deci punctul are coordonatele $\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$.

Răspuns corect: (b). □

10. Considerăm şirul dat prin

$$x_0 = 1,\ x_{n+1} = \sin x_n,\ n \geq 0.$$

Atunci limita şirului (x_n) are valoarea:

(a) 0; (b) 1; (c) $\sin 1$; (d) $\dfrac{1}{2}$.

Soluţie. Cum

$$\sin x \le x, \ \forall x \ge 0,$$

cu egalitate doar pentru $x = 0$, rezultă că (x_n) este descrescător. Cum este mărginit inferior de 0, are limită ℓ. Trecând la limită în relaţia de recurenţă, rezultă

$$\ell = \sin \ell.$$

Dar acest lucru este posibil doar dacă $\ell = 0$.

Răspuns corect: (a). □

11. Fie C punctul de intersecţie a dreptelor de ecuaţii

$$(d_1) : y - 2x + 1 = 0, \quad (d_2) : y + 2x - 3 = 0.$$

Notăm cu M punctul de pe cercul cu centrul în C şi de rază 2 care este cel mai apropiat de punctul $A(2, 0)$. Atunci M are coordonatele:

(a) $(1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$; (b) $(1 + \sqrt{3}, 0)$; (c) $(2, 1 - \sqrt{3})$; (d) $(1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$.

Soluţie. Obţinem $C(1, 1)$, deci ecuaţia cercului este

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4.$$

Punctul M se află la intersecţia dintre CA şi cerc. Dreapta CA are ecuaţia

$$x + y - 2 = 0.$$

Înlocuind $y = 2 - x$ în ecuaţia cercului, obţinem

$$\begin{aligned} 2(x-1)^2 &= 4, \\ x^2 - 2x - 1 &= 0, \end{aligned}$$

de unde $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$. Se observă că punctul cel mai apropiat de A este cel de abscisă $1 + \sqrt{2}$.

Răspuns corect: (a). □

12. Fie $\mathcal{C}$ cercul circumscris ΔABC, unde $A(-1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(6, 1)$. Atunci punctul de pe cercul $\mathcal{C}$ aflat la distanţa maximă faţă de axa Oy are coordonatele:

(a) $(8, -3)$; (b) $(7, 0)$; (c) $(3, -3)$; (d) $(7, -3)$.

Soluţie. Centrul cercului se află la intesecţia mediatoarelor segmentelor $[AB]$ şi $[BC]$. Acestea au ecuaţiile

$$y = -x \text{ şi } y = 3.$$

Rezultă centrul cercului are coordonatele $(3, -3)$, iar raza are lungimea 5. Punctul aflat la distanţa maximă faţă de axa Oy de pe cerc are atunci coordonatele $(8, -3)$.

Răspuns corect: (a). □

13. Fie punctele $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$. Notăm $\mathcal{D} = \{M$ punct din plan$|\ MA + MB = 4\}$. Atunci distanţa maximă între două puncte ale mulţimii $\mathcal{D}$ este:

(a) 2; (b) $4\sqrt{3}$; (c) 4; (d) $2\sqrt{2}$.

Soluţie. Presupunem $M(x, y)$. Atunci

$$\begin{aligned} MA + MB = 4 &\iff \\ \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 4 &\iff \\ 3x^2 + 4y^2 = 12. \end{aligned}$$

Rezultă $\mathcal{D}$ este o elipsă de semiaxe 2, $\sqrt{3}$. Punctele aflate la distanţă maximă de pe elipsă sunt $P(0, -2)$ şi $Q(0, 2)$, iar $QP = 4$.

Răspuns corect: (c). □

14. Pentru fiecare $m \in \mathbb{R}$, considerăm triunghiul determinat de dreapta de ecuaţie $x + y - m = 0$ şi axele de coordonate şi notăm cu $P(m)$ pătratul lungimii razei cercului circumscris acestui triunghi. Atunci suma

$$S = P(1) + P(\sqrt{2}) + P(\sqrt{3}) + ... + P(\sqrt{12})$$

este divizibilă cu:

(a) 7; (b) 5; (c) 13; (d) 11.

Soluţie. Se observă că raza cercului circumscris triunghiului considerat are lungimea $\frac{m}{\sqrt{2}}$. Atunci

$$S = \frac{1}{2} \cdot (1 + 2 + ... + 12) = 39.$$

Răspuns corect: (c). □

15. În planul xOy considerăm punctele $A(3, \sqrt{3})$ şi $B(4, 0)$. Atunci unghiul dintre înălţimea şi mediana ΔAOB care pleacă din unghiul A are măsura egală cu:

(a) $\frac{\pi}{12}$; (b) $\frac{\pi}{4}$; (c) $\frac{\pi}{3}$; (d) $\frac{\pi}{6}$.

Soluţie. Să notăm cu D piciorul perpendicularei care pleacă din punctul A şi cu C punctul de intersecţie dintre mediana care pleacă din punctul A şi axa Ox. Atunci $C(2,0)$ şi $D(3,0)$. Rezultă că

$$\sin \widehat{DAC} = \frac{CD}{AC} = \frac{1}{2}.$$

Rezultă că $m\left(\widehat{DAC}\right) = \frac{\pi}{6}$.

Răspuns corect: (d). □

16. În planul xOy considerăm punctele $A(0,1)$ şi $B(2,0)$. Coordonatele punctului M aflat pe mediana AD a triunghiului AOB pentru care

$$MO^2 + MA^2 + MB^2$$

este minimă sunt:

(a) $(0,1)$; (b) $(1,0)$; (c) $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$; (d) $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Soluţie. Se observă că D are coordonatele $(1,0)$, deci dreapta AD are ecuaţia $y = -x+1$. Avem de determinat minimul sumei

$$x^2 + y^2 + x^2 + (y-1)^2 + (x-2)^2 + y^2$$

când $y = -x+1$, adică minimul sumei

$$6x^2 - 8x + 6.$$

Acesta se atinge pentru $x = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{3}$, deci M are coordonatele $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Răspuns corect: (c). □

17. Notăm cu A şi B punctele în care graficul funcţiei

$$f_m(x) = x^2 - 2(m-1)x - m$$

intersectează axa Ox, unde m este un parametru real. Valoarea lui m pentru care lungimea segmentului $[AB]$ este minimă este:

(a) $\frac{1}{2}$; (b) $\frac{1}{4}$; (c) 0; (d) 1.

Soluţie. Se observă că rădăcinile sunt

$$x_{1,2} = (m-1) \pm \sqrt{m^2 - m + 1}.$$

Atunci
$$AB = 2\sqrt{m^2 - m + 1}$$
şi este minimă pentru $m = \dfrac{1}{2}$.

Răspuns corect: (a). $\square$

18. Se consideră ecuaţia de gradul al doilea
$$(1+\alpha^2)x^2 - (1+\alpha)x + \alpha(1-\alpha) = 0,$$
cu rădăcinile $x_1, x_2 \neq 0$. Mulţimea tuturor valorilor lui $\alpha \in \mathbb{R}$ pentru care
$$-1 \leq \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1 x_2} \leq 0$$
este:

(a) $(-\infty, 1]$; (b) $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$; (c) $(-\infty, -1]$; (d) $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

Soluţie. Inecuaţia din enunţ este echivalentă cu
$$-1 \leq \frac{2+\alpha+\alpha^2}{\alpha(1-\alpha)} \leq 0.$$
Rezultă numitorul strict negativ, deci $\alpha \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, şi
$$\alpha^2 - \alpha \geq 2 + \alpha + \alpha^2,$$
de unde $\alpha \in (-\infty, -1]$.

Răspuns corect: (c). $\square$

19. Mulţimea tuturor soluţiilor inecuaţiei
$$2^{2x} - 13 \cdot 6^{x-1} + 9^x \leq 0$$
este:

(a) $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$; (b) $(-\infty, -1]$; (c) $(-\infty, 1]$; (d) $[-1, 1]$.

Soluţie. Prin împărţirea inecuaţiei la 6^x, obţinem
$$\left(\frac{2}{3}\right)^x - \frac{13}{6} + \left(\frac{3}{2}\right)^x \leq 0.$$

Notând $\left(\frac{3}{2}\right)^x = y > 0$, obţinem

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{y} - \frac{13}{6} + y \leq 0,\\
&y^2 - 13y + 6 \leq 0,\\
&y \in \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right],\\
&\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{x} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{1},
\end{aligned}$$

deci $x \in [-1, 1]$.

Răspuns corect: (d). □

20. Mulţimea tuturor soluţiilor inecuaţiei

$$\log_3 (3^x + 6) \cdot \log_{\frac{1}{3}} \left(3^{x+1} + 18\right) < -6$$

este:

(a) $[1, +\infty)$; (b) $(-\infty, 1]$; (c) $(1, +\infty)$; (d) $(-\infty, 1)$.

Soluţie. Inecuaţia se scrie echivalent

$$\frac{\ln (3^x + 6)}{\ln 3} \cdot \frac{\ln (3^x + 6) + \ln 3}{-\ln 3} < -6,$$

şi folosind substituţia $\ln (3^x + 6) = y > 0$, avem

$$y(y + \ln 3) > 6 \ln^2 3,$$

cu soluţia

$$y \in (-\infty, -3 \ln 3) \cup (2 \ln 3, \infty).$$

Cum $y > 0$, rezultă

$$\begin{aligned}
3^x + 6 &> 9,\\
x &> 1.
\end{aligned}$$

Răspuns corect: (c). □

21. Termenul care nu îl conţine pe x din dezvoltarea

$$\left(\sqrt[6]{\frac{1}{x}} + \sqrt[10]{x}\right)^n,$$

ştiind că suma coeficienţilor binomiali este 256, are valoarea:

(a) 28; (b) 56; (c) 8; (d) 70.

Soluţie. Suma coeficienţilor binomiali este $2^n = 256$, deci $n = 8$.

Atunci termenul general al dezvoltării este

$$C_8^k \cdot x^{-\frac{k}{6}} \cdot x^{\frac{8-k}{10}}.$$

Pentru a nu-l conţine pe x, trebuie ca

$$-\frac{k}{6} + \frac{8-k}{10} = 0,$$

de unde $k = 3$.

Termenul căutat are valoarea $C_8^3 = 56$.

Răspuns corect: (b). $\square$

22. Numărul de elemente ale mulţimii

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} |\ \exists n \in \mathbb{N} : z = (\sqrt[4]{3} + i\sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{3} + i^2\sqrt[4]{2}) \cdot \ldots \cdot (\sqrt[4]{3} + i^{4n}\sqrt[4]{2}) \right\}$$

este:

(a) infinit; (b) 1; (c) 3; (d) 2.

Soluţie. Să observăm că

$$\begin{aligned}
&(\sqrt[4]{3} + i^{4n}\sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{3} + i^{4n-1}\sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{3} + i^{4n-2}\sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{3} + i^{4n-3}\sqrt[4]{2}) \\
&= (\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{3} - i\sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{3} + i\sqrt[4]{2}) \\
&= (\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 1.
\end{aligned}$$

Răspuns corect: (b). $\square$

23. Valoarea parametrului real α pentru care rădăcinile polinomului

$$X^3 - \alpha X^2 + 14x - 8$$

sunt în progresie geometrică este:

(a) 5; (b) 6; (c) 7; (d) 8.

Soluţie. Din relaţiile lui Viete, rezultă

$$x_1 x_2 x_3 = 8.$$

Cum x_1, x_2, x_3 sunt în progresie geometrică, avem

$$x_1 = a,\ x_2 = aq,\ x_3 = aq^2,$$

deci

$$aq = 2.$$

Tot din relaţiile lui Viete, rezultă

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 14,$$

sau

$$a^2(q + q^2 + q^3) = 14.$$

Rezultă

$$4\frac{1+q+q^2}{q} = 14,$$

sau

$$2q^2 - 5q + 2 = 0.$$

Rezultă $q_1 = 2$, $q_2 = \frac{1}{2}$, respectiv $a_1 = 1$, $a_2 = 4$. În ambele cazuri, rădăcinile sunt $1, 2, 4$. Suma lor este 7 şi este egală cu α. Deci,$\alpha = 7$.

Răspuns corect: (c). □

24. Mulţimea tuturor valorilor parametrului $a \in \mathbb{R}$ pentru care polinomul $X^3 - 3X + a$ are număr maxim de rădăcini întregi este:

(a) $\mathbb{R}$; (b) $\{\pm 2\}$; (c) $\{2\}$; (d) $\{-2\}$.

Soluţie. Din relaţiile lui Viete, rezultă

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -3 \\ x_1x_2x_3 = -a. \end{cases}$$

De aici, deducem că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 6$. Polinomul poate avea maxim 3 rădăcini întregi, iar asta se întâmplă atunci când pătratele a două dintre ele sunt 1, iar pătratul celei de a treia e 4. Folosind şi $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, rezultă ca posibile triplete de rădăcini $(-1, -1, 2)$ şi $(1, 1, -2)$. Din ultima relaţie a lui Viete, avem $a = \pm 2$.

Răspuns corect: (b). □

25. Fie matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2x & 0 \\ 0 & 4x+1 & 0 \\ 0 & 3x & 1 \end{pmatrix}$, unde x este un parametru real. Mulţimea valorilor lui x pentru care $A(x)$ este egală cu inversa sa este:

(a) nu există; (b) $\left\{0, -\frac{1}{2}\right\}$; (c) $\{0\}$; (d) $\left\{0, \pm\frac{1}{2}\right\}$.

Soluţie. Impunem

$$A(x) \cdot A(x) = I_3,$$

de unde

$$A(4x^2 + 2x) = I_3.$$

Rezultă $4x^2 + 2x = 0$, de unde $x \in \left\{0, -\frac{1}{2}\right\}$.

Răspuns corect: (b). □

26. Presupunem că x_1, x_2, x_3, x_4 sunt 4 numere consecutive. Determinantul

$$\begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & 1+x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 1+x_4 \end{vmatrix}$$

este de forma:

(a) $4k$; (b) $4k+1$; (c) $4k+2$; (d) $4k+3$.

Soluţie. Se observă că determinantul este egal cu $1+x_1+x_2+x_3+x_4 = 1+4k+6 = 4m+3$.

Răspuns corect: (d). □

27. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Media geometrică a rădăcinilor ecuaţiei:

$$\det\left(A^3 - xI_3\right) = 0$$

este:

(a) 0; (b) 1; (c) -4; (d) -2.

Soluţie. Observăm că

$$A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

de unde ecuaţia $\det\left(A^3 - xI_3\right) = 0$ are rădăcinile $\pm 2\sqrt{2}$ şi 8. Rezultă că media căutată are valoarea -4.

Răspuns corect: (c). □

28. Fie A o matrice de ordinul 3 cu elementele egale cu ± 1. Atunci valoarea maximă pentru $\det A$ este:

(a) 2;   (b) 4;   (c) 6;   (d) 8.

Soluţie. Să observăm că

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{31} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Determinanţii de ordinul 2 pot fi $\pm 2,\ 0$. Dacă doi dintre ei sunt 2, al treilea este 0. Rezultă că valoarea maximă este 4. Se atinge, de exemplu, pentru matricea

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Răspuns corect: (b). $\square$

29. Fie $M = \{x; x \in \mathbb{R},\ x \geq 1\}$ şi operaţia internă

$$x * y = xy + \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}, \quad \forall x, y \in M.$$

Să se precizeze care din următoarele afirmaţii este adevărată:

(a) elementul neutru este 1, singurul element care are invers este 1;
(b) elementul neutru este 1, nici un element nu are invers;
(c) nu există element neutru;
(d) da, elementul neutru este 1, toate elementele sunt inversabile.

Soluţie. Determinăm elementul neutru e :

$$\begin{aligned} & x * e = x, \quad \forall x \in M \\ & \quad \Rightarrow xe + \sqrt{(x^2-1)(e^2-1)} = x, \quad \forall x \in M \\ & \quad \Rightarrow e = 1. \end{aligned}$$

Se observă că 1 are invers: $1 * 1 = 1$ (inversul lui 1 este 1).

Dacă $x > 1 \Rightarrow x * y = xy + \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)} \geq xy \geq x > 1$, $\forall y \in M$.

Deci oricare element diferit de 1 nu are invers.

Răspuns corect (a). $\square$

30. Mulţimea tuturor valorilor parametrului $a \in \mathbb{Z}_7$ pentru care polinomul

$$f = X^6 + aX + \hat{5}$$

este reductibil este:

(a) $\{\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}\}$; (b) $\mathbb{Z}_7 \backslash \{\hat{0}\}$; (c) $\emptyset$; (d) $\mathbb{Z}_7$.

Soluţie. Se observă că polinomul

$$g = f + \hat{1}$$

are proprietatea că

$$g(b) = b \cdot a, \quad \forall b \in \{\hat{1}, ..., \hat{6}\}.$$

Cum orice element din $\mathbb{Z}_7 \backslash \{\hat{0}\}$ este inversabil, rezultă că pentru orice $a \in \mathbb{Z}_7 \backslash \{\hat{0}\}$, există un $b = a^{-1} \in \mathbb{Z}_7 \backslash \{\hat{0}\}$ astfel încât $g(b) = \hat{1}$, adică $f(b) = \hat{0}$, adică f este reductibil.

Pentru $a = \hat{0}$,

$$f = X^6 + \hat{5}$$

are proprietatea că, deşi nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_7$, este reductibil, deoarece se poate scrie ca

$$\left(X^3 + \hat{3}\right)\left(X^3 + \hat{4}\right).$$

Răspuns corect: (d). □